Απειροστικός ΙΙ 29/03/2019

(Φ.4) Αν $f: A \to \mathbb{R}$ ομ. συνεχής κ' $\exists c>0$, τ.ω $f(x) \geq c$ $\forall x \in A$ τοτε $\frac{1}{f}$ ομ. συνεχής

Αποδειξη:

Εστω $\{x_n\}, \{y_n\}$ ακολουθίες απο το A τ.ω $x_n - y_n \to 0$. Αρκεί νδο $\frac{1}{f(x_n)} - \frac{1}{f(y_n)} \to 0$

$$\left| \frac{1}{f(x_n)} - \frac{1}{f(y_n)} \right| = \left| \frac{f(y_n) - f(x_n)}{f(x_n) f(y_n)} \right| \leq \frac{1}{c^2} |f(x_n) - f(y_n)| \to 0$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{f(x_n)} - \frac{1}{f(y_n)} \to 0$$

Αν δεν υποθεσαμε $f(x) \geq c$, $\forall x \in A$, δεν ισχυει π.χ $f(x) = x$, $x \in (0,1]$, ομως $\frac{1}{f}$ οχι ομ. συνεχης στο $(0,1]$ επειδη $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x}$ δεν υπαρχει.

• Αν f,g $A \to \mathbb{R}$ είναι ομ. συνεχείς στο A κ' φραγμένες $\Longrightarrow$ fg ομ. συνεχείς

• Αν f,g οχι φραγμένες τοτε η f,g μπορεί να μην είναι ομοιόμορφα συνεχης
π.χ $f,g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x$, $g(x) = x$

Ερώτημα: Αν $f,g: A \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχείς και η f φραγμένη $\overset{?}{\Longrightarrow}$ f,g ομ. συνεχής
Απάντηση: ΟΧΙ
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ $\longrightarrow$

→ ~~$f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$~~, ~~$f(x)=x\sin x$~~

$h:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $h(x)=\underbrace{|x|\,\boxed{\sin x}}_{g(x)}=f(x)$

η h οχι ομοιόμορφα συνεχής

<u>Αποδειξη:</u>

$x_n=2\pi n+\frac{1}{n}$, $y_n=2\pi n \Rightarrow x_n-y_n=\frac{1}{n}\to 0$

$h(x_n)-h(y_n)=x_n\sin x_n-y_n\sin y_n+x_n\sin y_n-x_n\sin y_n$

$=x_n(\sin x_n-\sin y_n)+\underbrace{(x_n-y_n)}_{\text{πάει στο μηδεν}}\boxed{\sin y_n}\to$ φραγμένη

μηδενική επι φραγμένη αρα πάει στο μηδέν

$x_n(\sin x_n-\sin \overset{0}{y_n})=(2\pi n+\frac{1}{n})\sin(2\pi n+\frac{1}{n})=(2\pi n+\frac{1}{n})\sin\frac{1}{n}$

$=(2\pi n+\frac{1}{n})\frac{1}{n}\frac{\sin\frac{1}{n}}{1/n}\to 2\pi$

αυτο πάει στο 1

Επομένως $x_n(\sin x_n-\sin y_n)+(x_n-y_n)\sin y_n=2\pi\neq 0$

$\Rightarrow$ οχι ομοιόμορφα συνεχής

ΑΣΚΗΣΗ 6 #2.

Αν f ομ. συνεχής στο $(-\infty,3]$ κ' ομ. συνεχής στο $[3,\infty)$

$\Rightarrow$ f ομ. συνεχης στο $\mathbb{R}$

Αν f ομ. συνεχης στο $(-\infty,\alpha],[\alpha,+\infty)$

$\Rightarrow$ η f ομ. συνεχης στο $(-\infty,\alpha]\cup[\alpha,+\infty)$

ομοίως αν f ομ. συνεχης στο $(\alpha_1,\alpha]$, $[\alpha,\alpha_2)$ $\Rightarrow$ f ομ. συνεχής στο (α_1,α_2)

Το $\alpha_1\in\mathbb{R}$ ή $-\infty$

$\alpha_2\in\mathbb{R}$ ή $+\infty$

ΑΣΚΗΣΗ 1 #2

β) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$, $x \in (0,1)$

$\lim_{x \to 0^+} f(x)$ δεν υπάρχει $\Rightarrow$ f όχι ομ. συνεχής

γ) $f(x) = \frac{1}{x-2}$

$\lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2}$ δεν υπάρχει

δ) $f(x) = \frac{1}{x-2}$ $\quad x \in (0,1)$

ναι γιατί είναι συνεχής και υπάρχουν τα

$\lim_{x \to 0^+} f(x)$, $\lim_{x \to 1^-} f(x)$

ε) $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$

$\left.\begin{array}{l} x_n = \ln(n+1) \\ y_n = \ln n \end{array}\right\} \Rightarrow x_n - y_n = \ln(n+1) - \ln n = \ln\frac{n+1}{n} \to 0$

$f(x_n) - f(y_n) = n+1-n = 1 \to 1 \neq 0$

$\Rightarrow$ όχι ομοιόμορφα συνεχής

στ) $f(x) = e^x$ $\quad x \in (-\infty, 3]$

ναι γιατί είναι συνεχής και $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ υπάρχει

ζ) $f(x) = \sin\sqrt{x}$, $x \geq 0$

1ος τρόπος (γρηγορότερος)

$f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sin x$ είναι ομ. συνεχείς στο $[0, +\infty)$ $\Rightarrow$ $\sin x\sqrt{x} = (g \circ f)(x)$ ομ. συνεχής.

2ος ΤΡΟΠΟΣ

$\sin\sqrt{x}$ ομ. συνεχής στο $[0,1]$
$\sin\sqrt{x}$ ομ. συνεχής στο $[1,\infty)$ $\Big\} \Rightarrow \sin\sqrt{x}$ ομ. συνεχής στο $[0,\infty)$

γιατί $\left|(\sin\sqrt{x})'\right| = \left|(\cos\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}\right| \leq 1$ για $x \geq 1$

$\Rightarrow \sin\sqrt{x}$ Lipshitz $\Rightarrow$ ομοιόμορφα συνεχής!!!

η) $f(x) = \frac{\sin^2(x)}{x}$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

ναι γιατί είναι συνεχής το $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left[\underbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)}_{\to 1}\sin x\right]$

$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1}{\pi/2}$

ΑΣΚΗΣΗ 5 #2

α) $f(x) = \ln x$ $x>0$ όχι γιατί $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

β) $f(x) = \ln x$, $x \geq 1$ ναι γιατί είναι συνεχής και έχει φραγμένη παράγωγο
και $|f'(x)| = \frac{1}{x} \leq |1|$ $\forall x \in [1,+\infty) \Rightarrow f$ Lipschitz $\Rightarrow$

f ομ. συνεχής

γ) $f(x) = 1/x^{\alpha}$ $x \geq 1$, $\alpha > 0$

ναι γιατί είναι συνεχής και $\exists \lim_{x\to +\infty} f(x)$ $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$

ς) $f(x) = 1/x^{\alpha}$, $x>0$, $\alpha>0$

όχι γιατί το όριο της $f(x)$ δεν υπάρχει $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

ε) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ $x>0$

ναι γιατί είναι συνεχής κ' $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 7 # 2</u>

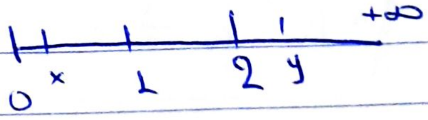
f ομ. συνεχής στο $[0,1]$, ομ. συνεχής στο $[2,+\infty)$
$\Rightarrow f : [0,1]\cup[2,+\infty) \to \mathbb{R}$ ομ. συνεχής

<u>Απόδειξη:</u>
Έστω $\varepsilon>0$
$\exists \delta_1 > 0$, τω $\forall x,y \in [0,1]$ με $|x-y|<\delta_1$,
να ισχύει $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$

• $\exists \delta_2 > 0$ τ.ω $\forall x,y\in[2,+\infty)$ με $|x-y|<\delta_2$ να ισχύει
$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$

Παίρνω $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, 1\}$

Έστω $x,y \in [0,1]\cup[2,+\infty)$ με $|x-y|<\delta$
(Αν $y\in[0,1] \Rightarrow x\in[0,1]$)
• Αν $x\in[0,1] \Rightarrow y\in[0,1]$



επειδή $|x-y| < \underset{\wedge\ \delta_1}{\delta} \le 1$

$\Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

• Αν x ή $y \in [2,+\infty) \Rightarrow x$ κ' $y \in [2,+\infty) \overset{|x-y|<\delta\leq\delta_2}{\Rightarrow}$

$|f(x)-f(y)|<\varepsilon \Rightarrow f$ ομ. συνεχής

<u>ΑΣΚΗΣΗ 8 #2</u>

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\begin{cases} x & ,x\geq 0 \\ 2x & ,x<0 \end{cases}$

f συνεχής στο $\mathbb{R}$

$\left.\begin{array}{l} \text{η } f \text{ είναι ομ. συνεχής στο } [0,\infty) \\ \text{η } f \text{ ομ. συνεχής στο } (-\infty,0) \end{array}\right\} \Rightarrow$

f ομ. συνεχής στο $\mathbb{R}$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 9 #2</u>

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\overset{\text{συνεχής}}{\text{αύξουσα}}$ και φραγμένη

Απδ Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μονότονη $\Rightarrow$ είτε $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$

είτε το $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)\in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{• Αν η } f \text{ είναι φραγμένη } \lim_{x\to\pm\infty} f(x)\in\mathbb{R}}$

Επειδή η $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)\in\mathbb{R} \Rightarrow f$ ομ. συνεχής

ΑΣΚΗΣΗ 1 #2

1) $f(x) = x^p$ $p>0$, $x\in(0,\infty)$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \in \mathbb{R}$

Αν $0<p\leq 1$, $f'(x) = p x^{p-1} \Rightarrow |f'(x)| \leq p$, $\forall x\in[1,\infty)$

$\Rightarrow f$ Lipschitz στο $[1,\infty) \Rightarrow f$ ομ. συνεχής στο $[1,\infty)$
κ' f ομ. συνεχής στο $[0,1] \Rightarrow f$ ομ. συνεχής στο $[0,\infty)$

Αν $p>1$?

$\lim_{x\to\infty} f'(x) = +\infty$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Αν $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και $\lim_{x\to\infty} f'(x)=\infty \Rightarrow f$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής

Απόδειξη: Έστω ότι f είναι ομ. συνεχής. Έστω $\varepsilon>0$
$\exists \delta>0$ τ.ω $\forall x,y\in[\alpha,+\infty)$ με $|x-y|<\delta$ να ισχύει $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$

Παίρνω ~~τυχαίο~~ τυχόν $x\in[\alpha,+\infty)$, $y = x+\frac{\delta}{2} \Rightarrow |x-y| = \frac{\delta}{2} < \delta$

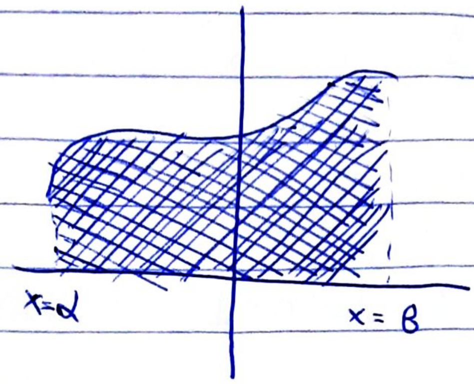
$\Rightarrow |f(x) - f(x+\frac{\delta}{2})| < \varepsilon$

Από ΘΜΤ $\exists \xi\in(x, x+\frac{\delta}{2})$ τ.ω $f'(\xi) = \dfrac{f(x+\delta/2)-f(x)}{\delta/2}$

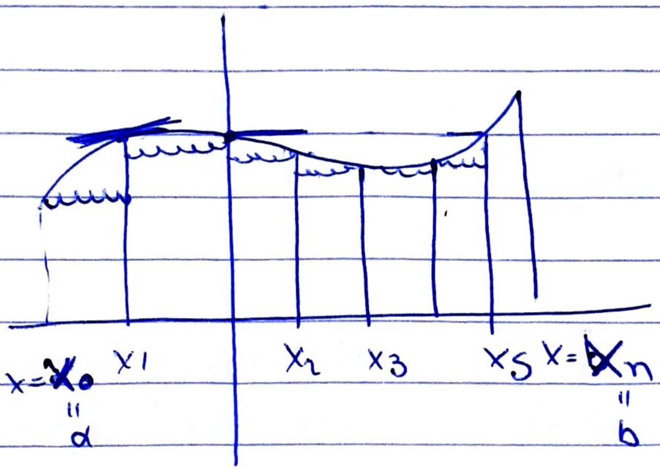
$\Rightarrow \underbrace{|f(x) - f(x+\delta/2)|}_{<\varepsilon} = |f'(\xi)|\frac{\delta}{2}$
$\Rightarrow |f'(\xi)| < \frac{2\varepsilon}{\delta} = M$ $\forall x\in[\alpha,+\infty)$ $\exists \xi > x$ τ.ω
(7) $|f'(\xi)|<M$, άτοπο γιατί $\lim_{x\to\infty} |f'(x)| = \infty$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ Riemann

$f \geq 0$
$f: [\alpha, b] \to \mathbb{R}_+$



$\int_\alpha^b f$ = Επιφανεια που περικλειεται απο το γραφημα της f και τις ευθειες $x=\alpha$, $x=b$, $y=0$



$$\int_\alpha^b f \cong \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \max_{[x_{i-1}, x_i]} f$$ ~ το μεγιστο ύψος

$$\int_\alpha^b f \cong \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \min_{[x_{i-1}, x_i]} f$$ ~ το ελάχιστο ύψος

Εαν η f είναι φραγμένη τοτε $\max = \sup f$ και $\min = \inf f$

το $\sup\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

το $\inf\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Εστω $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$
Τοτε το συνολο $P = \{ \underset{\alpha}{\overset{\shortparallel}{x_0}}, x_1, \dots, \underset{b}{\overset{\shortparallel}{x_n}} \}$ λεγεται διαμεριση

του διαστηματος $[\alpha, b]$

$$\left.\begin{aligned} U(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \\ L(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \end{aligned}\right\} \text{ονομάζονται}$$

Άνω κ' κάτω αθροίσματα Darboux της f ως προς την διαμεριση P, αντιστοιχα

- Εστω P', P διαμέριση του $[\alpha, b]$. Αν $P' \supseteq P$ τοτε η P' λέγεται εκλέπτυνση της P

- Πλάτος (ή νορμα) της P $\|P\| = \max\{ x_i - x_{i-1} : i = 1, \dots, n\}$

ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΑΝΩ Κ' ΚΑΤΩ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΩΝ:

Εστω P, P' δύο διαμερίσης του $[\alpha, b]$ τ.ω η P' να είναι εκλέπτυνση της P. Τοτε
$$L(f,P) \le L(f,P') \le U(f,P') \le U(f,P)$$

Αποδειξη: Αν δο $U(f,P') \le U(f,P)$ (η ανισοτητα

$L(f,P) = L(f',P')$ είναι όμοια)

Αρκεί να δείξουμε την ανισοτητα στην περίπτωση όπου $P = \{ \alpha = x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, \dots, x_n \}$,

$P' = \{ \alpha = x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, y, x_k, \dots, x_n = b \}$

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{k-1} (x_i - x_{i-1}) \sup_{[x_i, x_{i-1}]} f$$

$$+ (x_k - x_{k-1}) \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f$$

$$+ \sum_{i=k+1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f$$

$$U(f,P') = \sum_{i=1}^{k-1} (x_i - x_{i-1}) \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \; +$$

$$+ (y - x_{k-1}) \sup_{[x_{k-1}, y)} f + (x_i - y) \sup [y, x_k] f \; +$$

$$+ \sum_{i=k+1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f$$

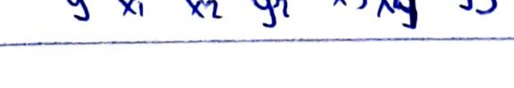
Αρκεί νδο $(y - x_{k-1}) \underset{\wedge|\;\sup_{[x_{k-1},x_k]} f}{\sup_{[x_{k-1}, y]} f} + (x_i - y) \underset{\wedge|\;\sup_{[x_{k-1},x_k]} f}{\sup_{[y, x_k]} f} \le$

$$\le (x_k - x_{k-1}) \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f$$

$$\le (y - x_{k-1}) \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f + (x_k - y) \sup_{[y, x_k]} f = (x_k - x_{k-1}) \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f$$

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: Έστω P_1, P_2 δύο διαμερίσεις του $[\alpha, b]$
Η κοινή εκλέπτυση των P_1, P_2 ορίζεται ως η διαμέριση
$P_1 \cup P_2$ $\quad P_1 : \alpha = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

$\quad P_2 : \alpha = y_0 < y_1 < \dots < y_m = b$



<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u> Έστω P_1, P_2 δυο οποιεσδήποτε διαμερίσεις του $[\alpha, b]$. Τότε $L(f, P_1) \leq U(f, P_2)$

<u>Απόδειξη:</u> $L(f, P_1) \leq L(f, P_1 \cup P_2) \leq U(f_1, P_1 \cup P_2) \leq U(f, P_2)$

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ:</u> Άνω ολοκλήρωμα της f:

$$\overline{\int_{\alpha}^{b}} f = \inf \{ U(f, P) : P \text{ διαμέριση του } [\alpha, b] \}$$

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u> Κάτω ολοκλήρωμα της f:

$$\underline{\int_{\alpha}^{b}} f = \sup \{ L(f, P) : P \text{ διαμέριση του } [\alpha, b] \}$$